

4 Wisselstroomtheorie

Laagdoorlaat & hoogdoorlaat filters



4.1 Passieve filters

4.1.1 Definitie

Parate kennis!

Passieve filters bestaan uit passieve componenten zoals *weerstand*, *condensatoren* en *spoelen* en maken geen gebruik van versterkende elementen zoals transistoren en OpAmps.



Je kan een passief filter opvatten als een **vierpool** met twee ingangsklemmen (ingangssignaal en massa) en twee uitgangsklemmen (uitgangssignaal en massa). Omdat ze het ingangssignaal niet kunnen versterken, zal het uitgangssignaal steeds *kleiner* zijn dan het aangeboden ingangssignaal.



△ Fig.4.1 Vierpool voorstelling van een passief filter.
Tekening: W. Van Wichelen

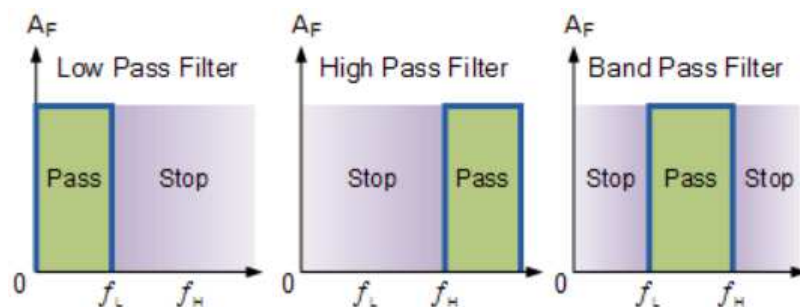
Ze danken hun naam aan het feit dat ze in staat zijn om bepaalde signaalfrequenties *door* te *laten* of te *blokken* (verzwakken). Ze **filteren** als het ware enkel de (voor de ontwerper) interessante signaalfrequenties uit.

4.1.2 Soorten filters

Parate kennis!

De meest gebruikte **filterontwerpen** zijn:

- **Laagdoorlaatfilter** (LDF):
 - ✓ laat enkel signaalfrequenties door vanaf 0 Hz tot de *afsnijfrequentie* (kantelfrequentie) f_c
 - ✓ hogere signaalfrequenties worden verzwakt
- **Hoogdoorlaatfilter** (HDF):
 - ✓ laat enkel signaalfrequenties door vanaf de *afsnijfrequentie* f_c
 - ✓ lagere signaalfrequenties worden verzwakt
- **Banddoorlaatfilter** (BDF):
 - ✓ laat enkel signaalfrequenties door van een bepaalde *frequentieband*
 - ✓ signaalfrequenties die buiten deze band vallen worden verzwakt



△ Fig.4.2 | Frequentiegrafieken van ideale filters.
Bron: <https://www.electronics-tutorials.ws>

4.1.3 Eerste orde filters

De meest eenvoudige passieve filters zijn de zogenaamde **eerste orde filters**. Ze bestaan in essentie uit de serieschakeling van een enkele weerstand en een enkele condensator waarbij we het ingangssignaal (V_{IN}) plaatsen over de gehele serieschakeling en het uitgangssignaal (V_{OUT}) aftakken over één component (R of C). Afhankelijk van de plaats van de weerstand en de condensator gedraagt deze configuratie zich als een *laagdoorlaatfilter* of een *hoogdoorlaatfilter*.

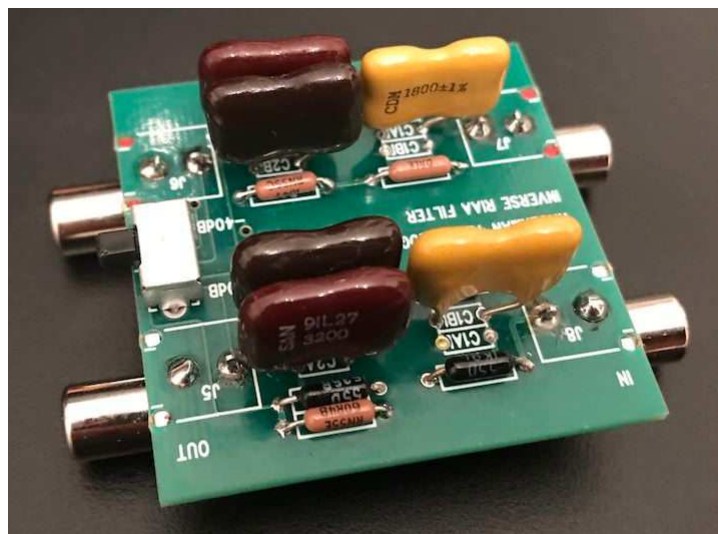
Parate kennis!

De **orde** is '1' omdat het filtercircuit maar één *reactieve* component bevat: nl. de *condensator*.



4.1.4 Spoelen in passieve filters

Voor **laag frequente** toepassingen (tot ongeveer 100 kHz) gaan we passieve filters meestal ontwerpen m.b.v. eenvoudige RC-netwerken. We zouden in principe ook kunnen gebruik maken van gewikkelde *spoelen*, maar deze componenten zijn veel duurder dan hun reactieve broertjes. Ook het magnetische strooiveld kan dikwijls oorzaak zijn van veel ongewenste effecten. Toch worden spoelen ook wel toegepast in passieve filterontwerpen: bij toepassingen boven 100 kHz maken ze deel uit van zogenaamde **RLC-filters**.

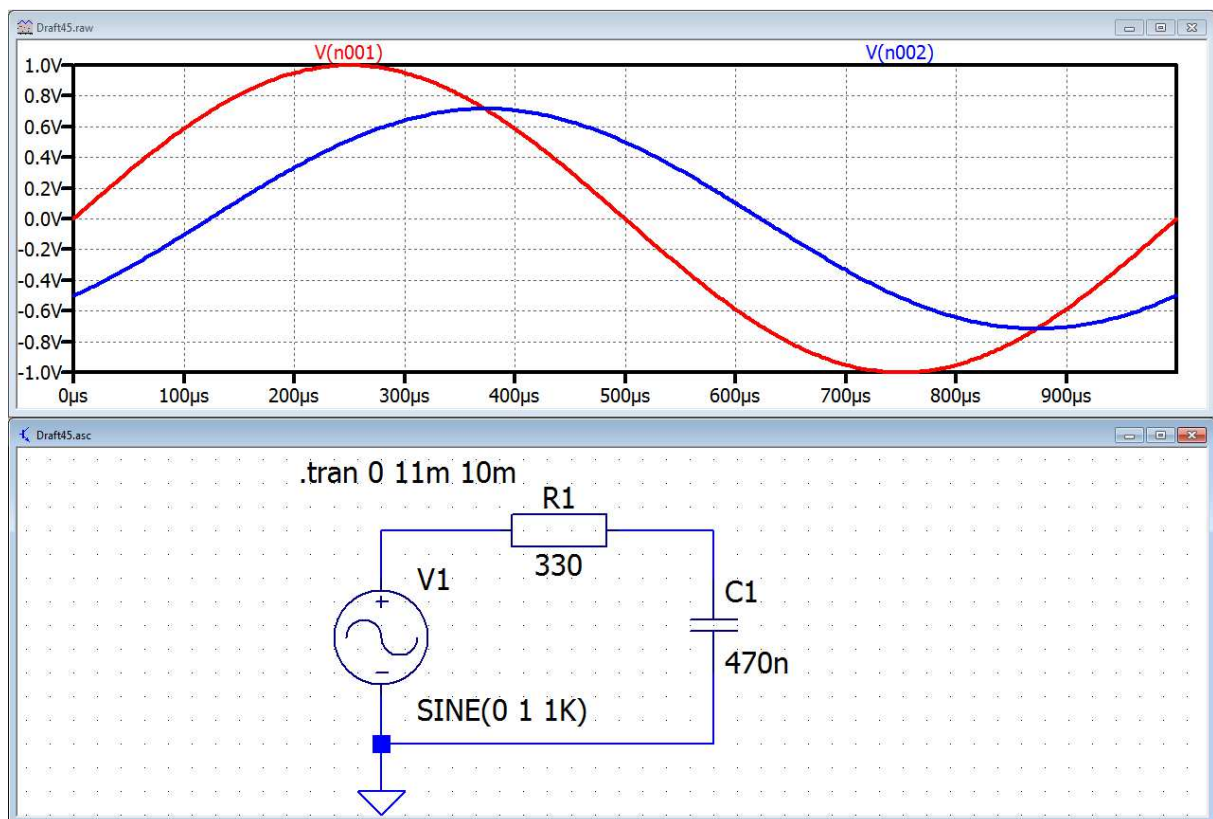


△ Fig.4.3 | Passief RIAA-filter voor het correct weergeven van muziek op vinyl. Bron: <https://www.lencoheaven.net>

4.2 RC-laagdoorlaatfilter

4.2.1 Tijddomein & frequentiedomein

Hoog tijd om eens van strategie te veranderen... Tot hier toe hebben we de wisselstroomkringen bestudeerd in het **tijddomein**. We stelden onze sinus signaalbron steeds in op één bepaalde frequentie. In het labo maakten we de deelspanningen zichtbaar op een oscilloscoopscherm waarbij we de x-as instelden als een *tijd-as*. Het simuleren met LTspice deden we in de zogenaamde transient analyse modus waarbij we ook hier gebruik maakten van een x-as ingesteld als tijd-as. Op die manier kenden we het gedrag van de AC-kring bij die ene frequentie.



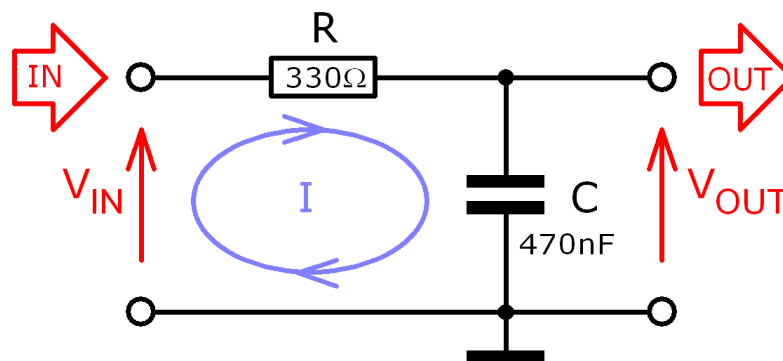
△ Fig.4.4 | Transient analyse m.b.v. een SPICE simulator.
Simulatie: W.Van Wichelen (LTspice)

Maar wat zouden de mogelijke effecten zijn bij al die oneindig andere mogelijke frequenties? Om dat te kunnen bestuderen gaan we gebruik maken van een AC-onderzoek (AC-analyse) waarbij de x-as nu niet is ingesteld als tijd-as maar als frequentie-as. Bij AC-analyses maken we berekeningen in het **frequentiedomein** en drukken we de x-as uit in Hertz (Hz) in plaats van in seconden (s).

4.2.2 Spanningstransfert

In het frequentiedomein is het de gewoonte om twee signalen met elkaar te vergelijken binnen een bepaalde frequentieband. Dikwijls gaan we *uitgangssignalen* (uitgangsspanning) vergelijken met de daarbijhorende *ingangssignalen* (ingangsspanning). We kijken dus hoeveel van het originele ingangssignaal wordt overgedragen naar de uitgang. We spreken dan ook van zg. **overdrachtfuncties**, of **transfertfuncties**, kortweg '*transfert*'. Wanneer we de *spanning* nemen als te bestuderen grootte in ons AC-onderzoek, dan spreken we van de **spanningstransfert**.

Genoeg inleidende woorden. Laten we nu maar starten met onze eerste *AC-analyse*. Voorwerp van onderzoek: de RC-seriekring van figuur 4.5.



△ Fig.4.5 | R+C eerste orde filter
Tekening: W.Van Wichelen (TinyCAD)

De ingangsspanning (V_{IN}) staat over de serieschakeling van $R + C$. De uitgangsspanning (V_{OUT}) takken we af over de condensator C . Er vloeit maar één stroom in de kring, nl. de kringstroom ' I '. We gaan nu twee *vergelijkingen* opstellen: één voor de *stroom* (I) en één voor de *uitgangsspanning* (V_{OUT}).

VERGELIJKING VAN DE KRINGSTROOM

De kringstroom I vloeit doorheen de componenten R en C . Volgens de wet van Ohm kunnen we noteren:

$$I = \frac{V_{IN}}{R + X_C}$$

We rekenen verder met de complexe notatie:

$$I = \frac{V_{IN}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \quad (1)$$

VERGELIJKING VAN DE UITGANGSSPANNING

We takken de uitgangsspanning af over condensator C. Volgens de wet van Ohm kunnen we noteren:

$$V_{OUT} = I \cdot X_C$$

We rekenen verder met de complexe notatie:

$$V_{OUT} = I \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \quad (2)$$

SUBSTITUTIE (1) IN (2)

Invullen (substitutie) van vergelijking voor I (1) in de vergelijking voor V_{OUT} (2) geeft:

$$\begin{aligned} V_{OUT} &= \frac{V_{IN}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \\ &= V_{IN} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \\ &= V_{IN} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C \cdot \left(R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}\right)} \\ &= V_{IN} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C + 1} \quad (3) \end{aligned}$$

SPANNINGSTRANSFERT (COMPLEX)

In vergelijking (3) delen we linkerlid en rechterlid door V_{IN} :

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C + 1} \quad (4)$$

Het linkerlid van (4) (V_{OUT}/V_{IN}) noteren we als A_V en dit staat voor de **spanningsversterking** of - **verzwakking**:

$$A_V = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \quad (5)$$

NOEMER VRIJMAKEN VAN j

Teller en noemer vermenigvuldigen met het complex toegevoegde geeft:

$$A_V = \frac{1 \cdot (1 - \omega \cdot R \cdot C \cdot j)}{(1 + \omega \cdot R \cdot C \cdot j) \cdot (1 - \omega \cdot R \cdot C \cdot j)} \quad (6)$$

A_V IN DE VORM: $a + bj$

Uitwerken van de noemer $(a+bj)(a-bj)$ geeft:

$$\begin{aligned} A_V &= \frac{1 - \omega \cdot R \cdot C \cdot j}{1^2 + (\omega \cdot R \cdot C)^2} \\ &= \frac{1}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2} - \frac{\omega \cdot R \cdot C}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2} \cdot j \quad (7) \end{aligned}$$

MODULUS (GROOTTE) VAN A_V

Vergelijking (7) is van de vorm $a + bj$ waarbij a het reële deel is en b het imaginaire deel. De modulus bepalen we door de vierkantswortel te nemen uit $a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} |A_V| &= \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \\ &= \sqrt{\frac{1^2}{[1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2]^2} + \frac{(\omega \cdot R \cdot C)^2}{[1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2]^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}{[1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2]^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}} \quad (8) \end{aligned}$$

4.2.3 Amplitudekarakteristiek

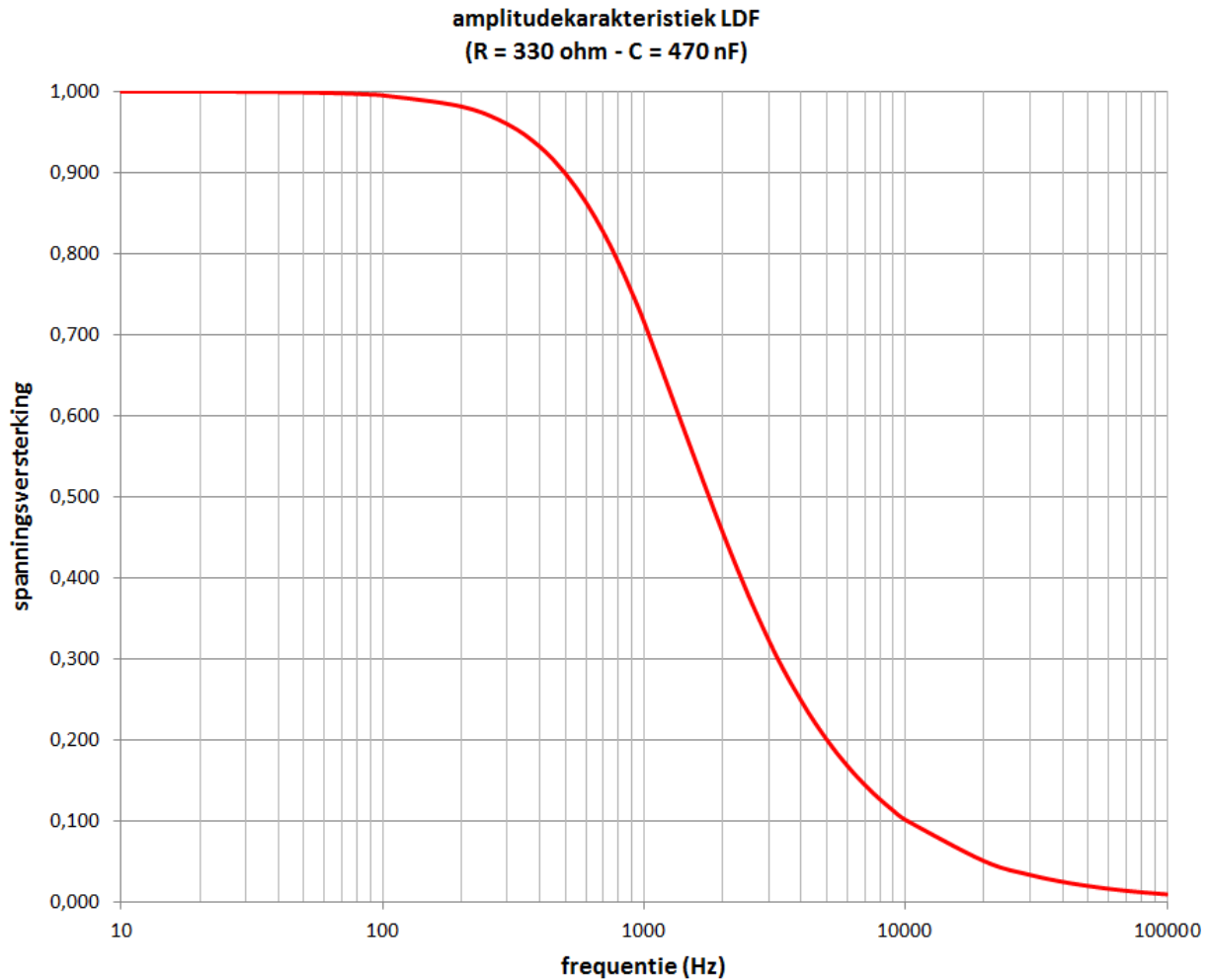
Deze laatste vergelijking (8) stelt ons in staat om voor elke denkbare frequentie de **versterkingsfactor** (A_v) van het RC-filter van figuur 4.5 te bepalen. Deze factor zal steeds kleiner zijn dan 1 omdat er geen versterkende elementen zijn opgenomen. Het is dus zinvol om A_v de *spanningsverzwakking* te noemen in plaats van *spanningsversterking*. Tussen haakjes, die 'A' is afkomstig van het Engelse '**A**mplification' of '**A**ttenuation'.

Vergelijking (8) geeft ons de spanningsversterking A_v voor elke denkbare waarde voor de hoeksnelheid (ω). We weten dat deze hoeksnelheid gelijk is aan de frequentie op een factor 2π na. Laten de spanningstransfert eens bepalen voor een 40-tal frequenties, te beginnen vanaf 10 Hz tot 100 kHz. Met elk standaard rekenbladprogramma (en neen, dit hoeft echt niet Excel (MS) te zijn, Gnumeric (Linux), Calc (Open Office) of Numbers (Mac) zijn even goed en soms nog beter!) is dat een koud kunstje. De tabel van figuur 4.6. toont de resultaten.

f (Hz)	A_v	f (Hz)	A_v	f (kHz)	A_v	f (kHz)	A_v
10	1,000	100	0,995	1	0,716	10	0,102
20	1,000	200	0,982	2	0,456	20	0,051
30	1,000	300	0,960	3	0,324	30	0,034
40	0,999	400	0,932	4	0,248	40	0,026
50	0,999	500	0,899	5	0,201	50	0,021
60	0,998	600	0,863	6	0,169	60	0,017
70	0,998	700	0,826	7	0,145	70	0,015
80	0,997	800	0,789	8	0,127	80	0,013
90	0,996	900	0,752	9	0,113	90	0,011

△ Fig.4.6 | Rekenbladresultaten voor de versterkingsfactor A_v
($R = 330 \text{ ohm}$ en $C = 470 \text{ nF}$)

We zetten de waarden voor de spanningstransfert A_v (y-as) uit in functie van de frequentiewaarden (x-as). Met de resultaten van tabel 4.6 bekomen we also de **amplitudekarakteristiek**, ook wel *frequentierespons* of *frequentiekarakteristiek* genoemd. Figuur 4.7 toont de amplitudekarakteristiek van het RC-filter met $R = 330 \Omega$ en $C = 470 \text{ nF}$. Een opmerkelijke student heeft alvast de speciale indeling van de frequentie-as in de gaten. De x-as is opgedeeld in zg. **decaden**, typisch voor elke **logaritmische** asindeling.



△ Fig.4.7 | Amplitudekarakteristiek van een RCLDF met $R = 330 \text{ ohm}$ en $C = 470 \text{ nF}$
Grafiek: W. Van Wichelen (Excel)

Laten we deze amplitudekarakteristiek eens wat van naderbij bekijken. Wat valt op? Lage signaalfrequenties tot ca. 100 Hz verschijnen onverzwakt aan de uitgang. De spanningsversterking A_v is dan ca. gelijk aan 1. Rond 1 kHz is de spanningsversterking gelijk aan ca. 0,7 en kunnen we dus beter spreken van een *spanningsverzwakking*. Slechts 70% van de originele amplitude van hetingangssignaal wordt bij een signaalfrequentie van 1 kHz doorgelaten. Vanaf 1 kHz gaat A_v snel naar beneden: bij 100 kHz schiet er van de originele ingangsamplitude bijna niets meer over!

Parate kennis!

Algemeen kunnen we stellen dat dit RC-filter de *lage* frequenties *doorlaat* en de *hoge* frequenties *blokkeert*. Vandaar ook zijn naam: het **RC-laagdoorlaatfilter**.



4.2.4 RC-tijdconstante

Vooraleer we de **afsnijfrequentie** (kantelfrequentie) kunnen definiëren is het van belang te weten dat elke RC-kring een *tijdbepalend* netwerk is. We maken even een zijspiongetje naar DC-regime. Als je een condensator wil opladen via een weerstand, dan duurt het een bepaalde tijd eer hij opgeladen is. We kunnen nu een zogenaamde **tijdconstante** τ (tau) defininiëren die we eenvoudig kunnen berekenen door de waarde van de weerstand te vermenigvuldigen met de capaciteitswaarde van de condensator.

Parate kennis!

De **tijdconstante** van een RC-netwerk:

$$\tau = R \cdot C$$

- τ : tijdconstante (tau) in seconden (s)
- R : weerstand in ohm (Ω)
- C : capaciteit in farad (F)



4.2.5 Afsnijfrequentie

Eerder definieerden we de *tijdconstante* van een willekeurig RC-netwerk. Zo bezit ook ons laagdoorlaatfilter (LDF) een RC-tijd. De reciproke (omgekeerde, inverse) grootheid van 'tijd' (s) is 'frequentie' (Hz). Een interessant punt (*cut-off frequency point*) van de amplitudekarakteristiek is de spanningsversterking bij de zogenaamde **afsnijfrequentie** (f_c) of **kantelfrequentie** (f_k). Deze afsnijfrequentie is (op een factor 2π na) niets anders dan de *reciproke* van de RC-tijd.

Parate kennis!

De **afsnijpulsatie** van een RC-filter van eerste orde:

$$\omega_c = \frac{1}{R \cdot C} = \frac{1}{\tau}$$

De **afsnijfrequentie** van een RC-filter van eerste orde:

$$f_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

- f_c : afsnijfrequentie, kantelfrequentie in hertz (Hz)
- τ : tijdconstante (tau) in seconden (s)



SPANNINGSVERSTERKING BIJ $f = f_c$

Om de spanningsversterking $A_{V(c)}$ te kennen bij het kantelpunt van de amplitudekarakteristiek vullen we de afsnijpulsatie ω_c in in vergelijking (8):

$$\begin{aligned}
 A_{V(c)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c \cdot R \cdot C)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R \cdot C} \cdot R \cdot C\right)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Parate kennis!

- Bij de **afsnijfrequentie** is de spanningsversterking:

$$A_{V(c)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$



- Bij een signaalfrequentie gelijk aan de kantelfrequentie laat het LDF nog **70%** van de originele signaalamplitude door.
- Deze kantelfrequentie markeert de zg. **doorlaatband** (bandbreedte) van het LDF.
- Van signaalfrequenties binnen deze doorlaatband is steeds meer dan 70% van de originele signaalamplitude terug te vinden aan de uitgang.

4.2.6 Fasekarakteristiek

We kennen nu de uitdrukking voor de spanningstransfert, maar wat is nu de **faserelatie** in functie van de signaalfrequentie tussen het ingangssignaal en uitgangssignaal? We hernemen onze complexe berekening en concentreren ons op vergelijking (7).

FASEHOEK TUSSEN V_{IN} EN V_{OUT}

M.b.v. de alomgekende methode kunnen we de faserelatie tussen ingang en uitgang bepalen:

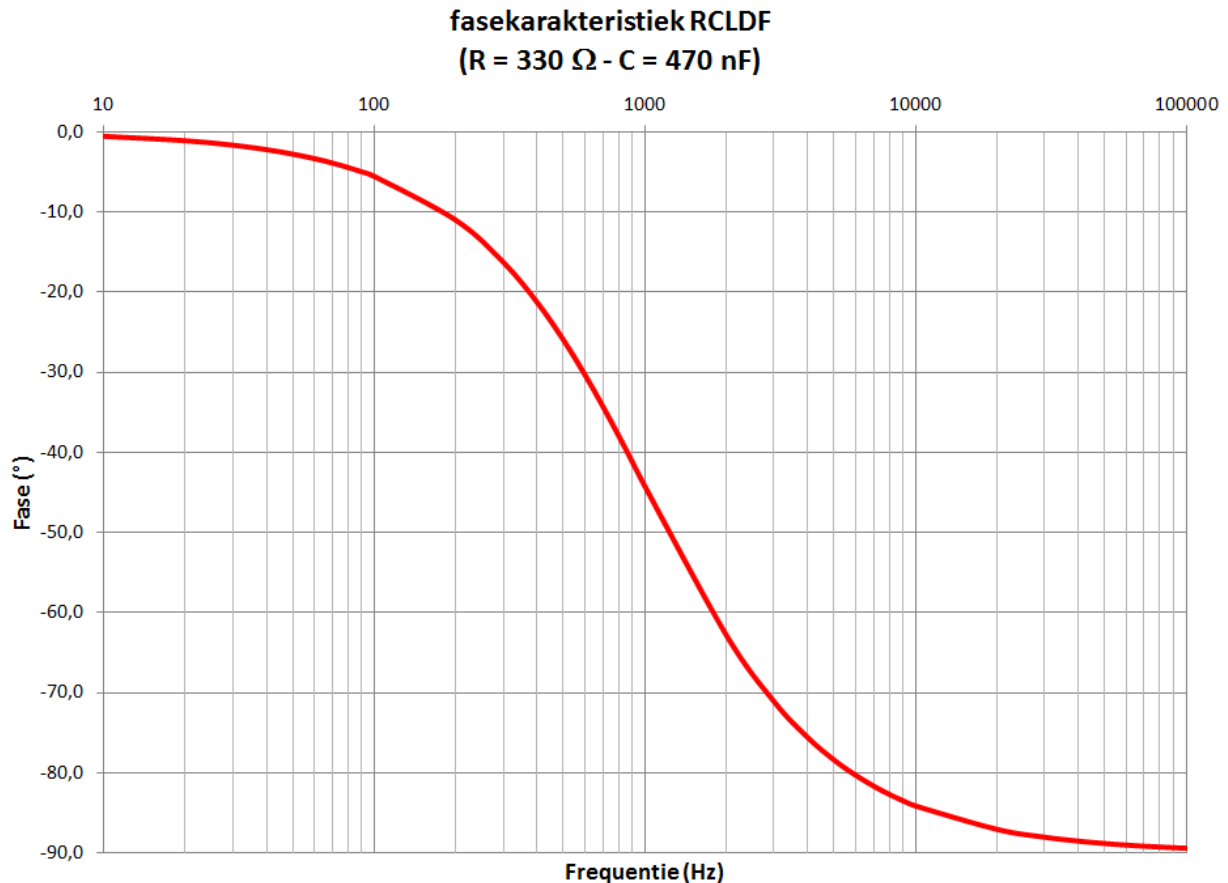
$$\begin{aligned}\varphi &= \text{Bgtg}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) \\ &= \text{Bgtg}\left(\frac{-\frac{\omega \cdot R \cdot C}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}}{\frac{1}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}}\right) \\ &= \text{Bgtg}(-\omega \cdot R \cdot C) \quad (10)\end{aligned}$$

We voeren uitdrukking (10) in als formule in ons rekenblad en we genereren also de tabel van figuur 4.8:

f (Hz)	φ (°)	f (Hz)	φ (°)	f (kHz)	φ (°)	f (kHz)	φ (°)
10	-0,6	100	-5,6	1	-44,3	10	-84,1
20	-1,1	200	-11,0	2	-62,8	20	-87,1
30	-1,7	300	-16,3	3	-71,1	30	-88,0
40	-2,2	400	-21,3	4	-75,6	40	-88,5
50	-2,8	500	-26,0	5	-78,4	50	-88,8
60	-3,3	600	-30,3	6	-80,3	60	-89,0
70	-3,9	700	-34,3	7	-81,7	70	-89,2
80	-4,5	800	-37,9	8	-82,7	80	-89,3
90	-5,0	900	-41,3	9	-83,5	90	-89,3

△ Fig.4.8 | Rekenbladresultaten voor de fasehoek.
(R = 330 ohm en C = 470 nF)

Zetten we de rekenbladresultaten van tabel 4.8 uit in grafiek dan bekommen we de zg. **fasekarakteristiek** van figuur 4.9.



△ Fig.4.9 | Fasekarakteristiek van een RCLDF met $R = 330 \, \text{ohm}$ en $C = 470 \, \text{nF}$
Grafiek: W. Van Wichelen (Excel)

Bij lage signaalfrequenties tot ca. 100 Hz is de fasedraaiing tussen ingangsspanning en uitgangsspanning heel beperkt: minder dan -10° . Het filter gedraagt zich nu nagenoeg zuiver ohms. Bij 1 kHz ijlt de uitgangsspanning ca. -45° na op de ingangsspanning. Eerder markeerden we dit speciale punt in de amplitudegrafiek bij de zg. kantelfrequentie f_c . Vanaf 1 kHz neemt de fasehoek snel toe om bij 100 kHz te stranden op ca. -90° . De invloed van de condensator is dan alles overheersend en het filter gedraagt zich nu zuiver reactief.

Kunnen we de fasehoek tussen in- en uitgangsspanning bij de afsnijfrequentie theoretisch bepalen? Jawel! We vertrekken van uitdrukking (10) en we gaan onmiddellijk aan de slag!

FASEHOEK BIJ $f = f_c$

We vullen ω_c in in vergelijking (10):

$$\begin{aligned}\varphi_c &= Bgtg(-\omega_c \cdot R \cdot C) \\ &= Bgtg\left(-\frac{1}{R \cdot C} \cdot R \cdot C\right) \\ &= Bgtg(-1) \\ &= -45^\circ\end{aligned}$$

Parate kennis!

- Bij *zeer lage* signaalfrequenties is de fasehoek **0°** en gedraagt de RCLDF zich **zuiver ohms**.
- Bij signaalfrequenties die *lager* zijn dan de kantelfrequentie ($f < f_c$) is de fasedraaiing eerder beperkt en weegt de **ohmse component** door.
- Bij de **afsnijfrequentie** (kantelfrequentie) is de fasehoek (fasedraaiing) tussen de *ingangsspanning* en *uitgangsspanning* juist **-45°**
- Bij signaalfrequenties die *hoger* zijn dan de kantelfrequentie ($f > f_c$) neemt de fasedraaiing toe en weegt de **reactieve component** door.
- Bij *zeer hoge* signaalfrequenties is de fasehoek **-90°** en gedraagt de RCLDF zich **zuiver reactief**.

**4.2.7 Spanningstransfert in decibel**

Onder elektronici is het de gewoonte om de spanningstransfert uit te drukken in **decibel** (dB). Daar hebben ze natuurlijk wel hun goede redenen voor. Om de spanningsversterking A_v om te zetten naar een spanningsversterking in dB ($A_{v(dB)}$) dien je de logaritme van A_v te nemen en te vermenigvuldigen met factor 20.

$$A_{v_{dB}} = 20 \cdot \log(A_v)$$

Een voornaam voordeel van deze omzetting is dat je de amplitude-karakteristiek van fig.4.7 nu volledig **lineair** kan maken.

Parate kennis!

- Is de **decibelwaarde** *positief*, dan hebben we te maken met VERSTERKING (amplification).
- Is de **decibelwaarde** *negatief*, dan hebben we te maken met VERZWAKKING (attenuation).



Laten we m.b.v. de bovenstaande formule de A_V -waarden van tabel 4.6 eens omzetten naar dB-waarden:

f (Hz)	$A_{V(dB)}$	f (Hz)	$A_{V(dB)}$	f (kHz)	$A_{V(dB)}$	f (kHz)	$A_{V(dB)}$
10	0,0	100	0,0	1	-2,9	10	-19,8
20	0,0	200	-0,2	2	-6,8	20	-25,8
30	0,0	300	-0,4	3	-9,8	30	-29,3
40	0,0	400	-0,6	4	-12,1	40	-31,8
50	0,0	500	-0,9	5	-13,9	50	-33,8
60	0,0	600	-1,3	6	-15,5	60	-35,3
70	0,0	700	-1,7	7	-16,8	70	-36,7
80	0,0	800	-2,1	8	-17,9	80	-37,8
90	0,0	900	-2,5	9	-18,9	90	-38,9

△ Fig.4.10 | Rekenbladresultaten voor de versterkingsfactor $A_{V(dB)}$
($R = 330 \text{ ohm}$ en $C = 470 \text{ nF}$)

Wat zou de dB-waarde van de spanningsversterking zijn bij de kantelfrequentie? We weten dat de spanningstransfert bij f_c gelijk is aan $1/\sqrt{2}$. We nemen de logaritme en vermenigvuldigen met 20.

SPANNINGSVERSTERKING IN dB BIJ $f = f_c$

$$\begin{aligned}
 A_{V(dB)} &= 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= 20 \cdot \log 1 - 20 \cdot \log \sqrt{2} \\
 &= 0 - 20 \cdot \log(2)^{1/2} \\
 &= -20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log(2) \\
 &= -10 \cdot \log(2) \\
 &= -3dB
 \end{aligned}$$

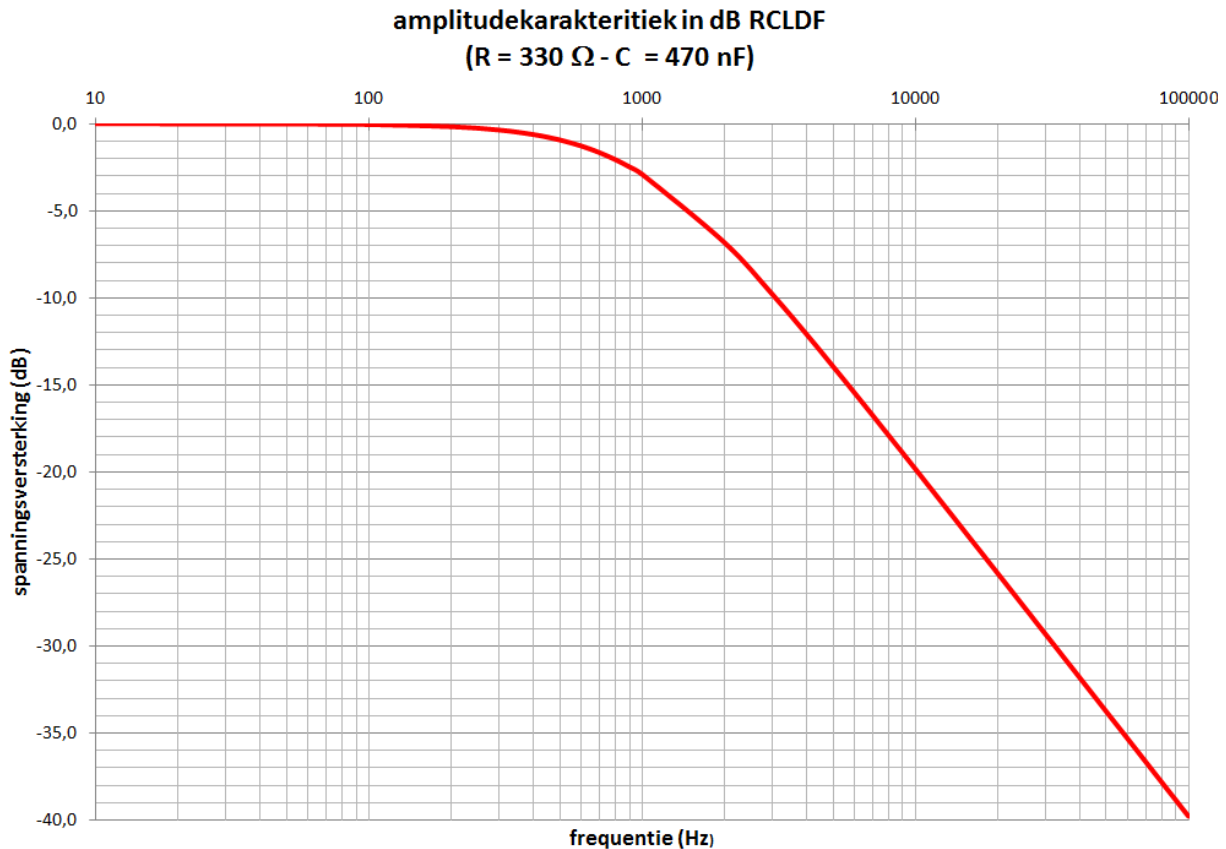
Parate kennis!

- Bij $f = f_c = f_{-3dB}$ is de dB-spanningsversterking:

$$A_{VdB(c)} = -3dB$$

- Het **-3dB-punt** markeert de zg. **doorlaatband** (bandbreedte) van het LDF.





△ Fig.4.11 Amplitudekarakteristiek in dB van een RCLDF met $R = 330 \text{ ohm}$ en $C = 470 \text{ nF}$
Grafiek: W. Van Wichelen (Excel)

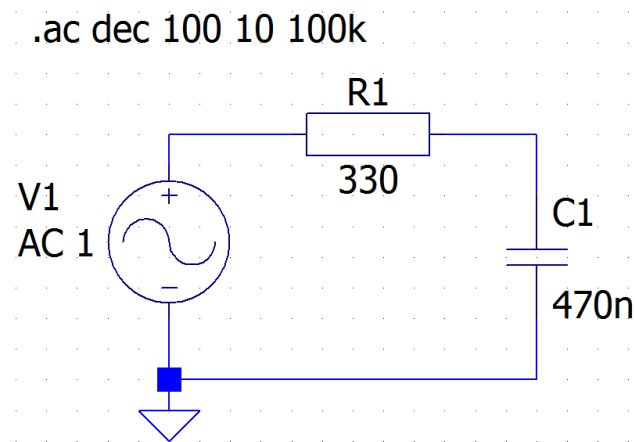
Dankzij de omzetting van de spanningstransfert naar dB laat de frequentiersponsiegrafiek zich nu eenvoudig schetsen. We herkennen twee asymptoten: een recht lijnstuk tot f_c , en vervolgens een dalende rechte met een helling van **-20dB/decade**.

4.2.8 Bodediagram

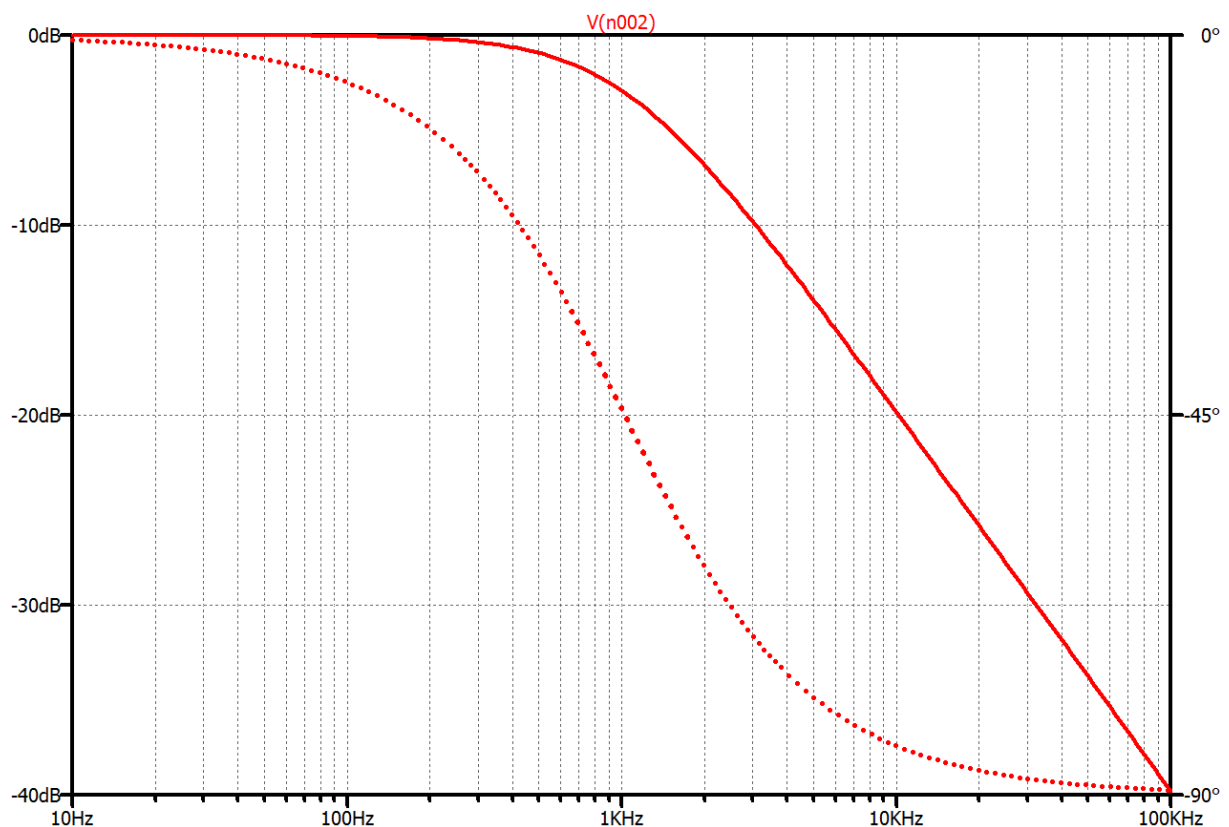
Wanneer we nu de dB-amplitudekarakteristiek van figuur 4.11 combineren met de fasekarakteristiek van figuur 4.9 dan bekommen we een zogenaamd **bodediagram** of **bodeplot**.

Het bodediagram is vernoemd naar Hendrik W. Bode (1905 - 1982) en bestaat uit twee boven elkaar geplaatste grafieken waarin de amplitudeversterking en de faseverschuiving als functie van de frequentie zijn uitgezet. Daarbij is de frequentie steeds op een logaritmische schaal gegeven. We gebruiken dit diagram bij het ontwerpen van filters (elektronica) en in de regeltechniek.

Zo levert de simulatietool LTspice ook standaard een bodeplot af bij elke AC-analyse. Figuur 4.12 toont het simulatieschema en figuur 4.13 is de door LTspice gegenereerde bodeplot.

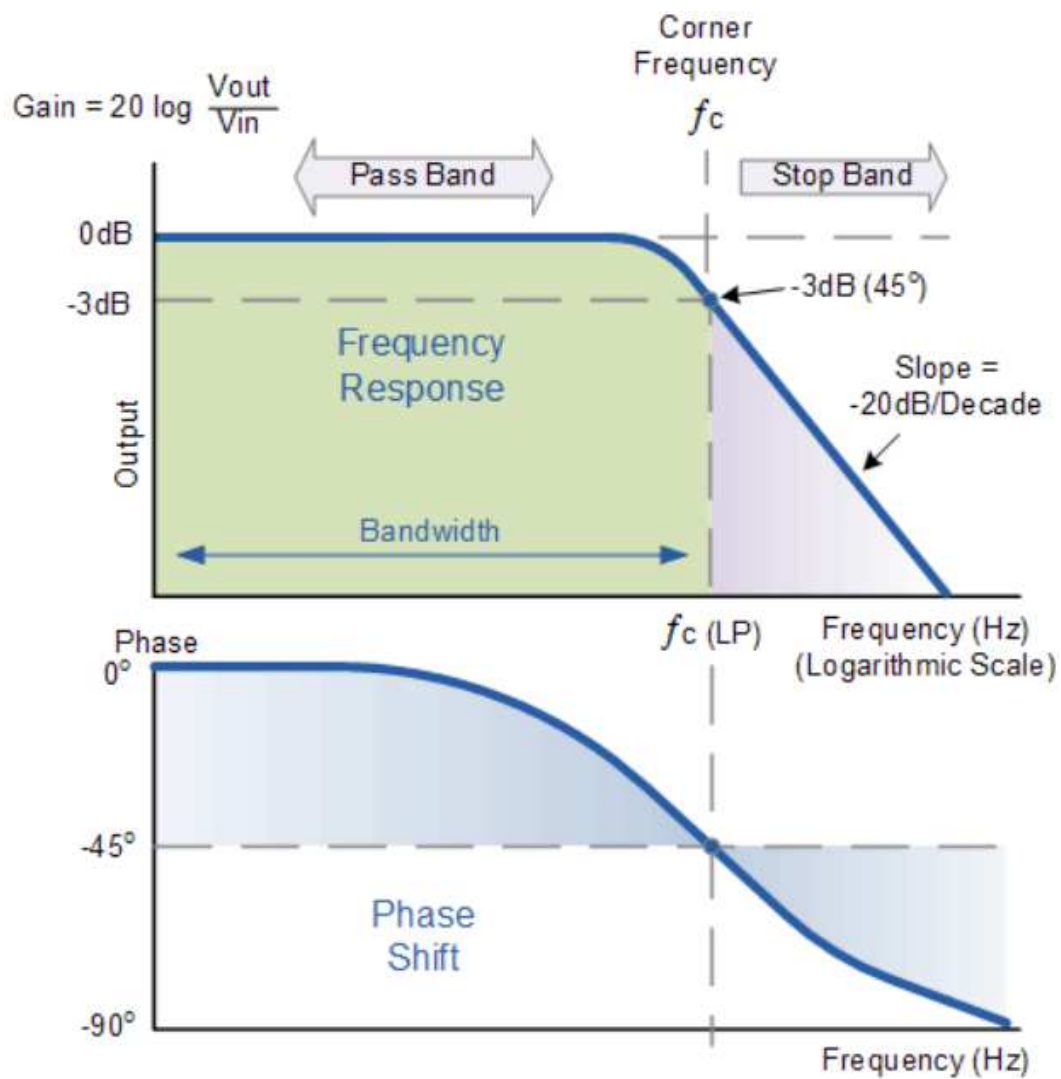


△ Fig.4.12 | Simulatieschema van een RCLDF
Tekening: W. Van Wichelen (LTspice)



△ Fig.4.13 | Bodeplot van een RCLDF
Simulatie: W. Van Wichelen (LTspice)

4.2.9 Samenvatting

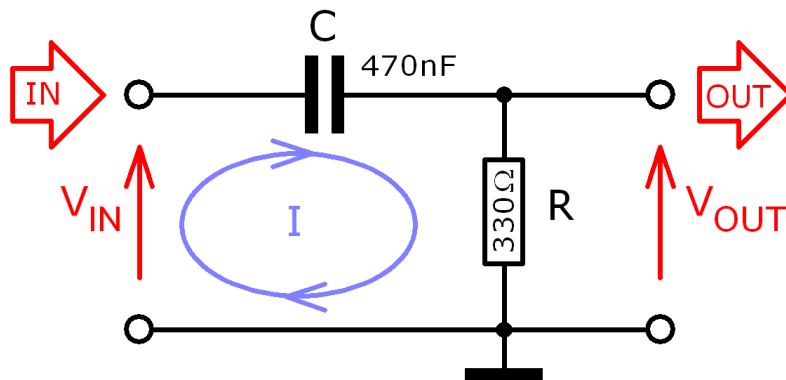


△ Fig.4.14 | Bodediagram van een 1ste orde laagdoorlaatfilter
 Bron: <https://www.electronics-tutorials.ws>

4.3 RC-hoogdoorlaatfilter

4.2.1 Spanningstransfert

In het vorige hoofdstuk hebben we het RC-netwerk, geschakeld als laagdoorlaatfilter, bestudeerd. Laten we nu de condensator en de weerstand van plaats *verwisselen*. Wat gaat nu het effect zijn? Om dit te weten te komen beginnen we een nieuwe AC-analyse die we traditiegetrouw starten met het opstellen van de *spanningstransfert*.



△ Fig.4.15 | R+C eerste orde filter als HDF
Tekening: W.Van Wichelen (TinyCAD)

VERGELIJKING VAN DE KRINGSTROOM

De kringstroom I vloeit doorheen de componenten C en R . Volgens de wet van Ohm kunnen we noteren:

$$I = \frac{V_{IN}}{X_C + R}$$

We rekenen verder met de complexe notatie:

$$I = \frac{V_{IN}}{\frac{1}{j\omega \cdot C} + R} \quad (1)$$

VERGELIJKING VAN DE UITGANGSSPANNING

We takken de uitgangsspanning af over weerstand R . Volgens de wet van Ohm kunnen we noteren:

$$V_{OUT} = I \cdot R \quad (2)$$

SUBSTITUTIE (1) IN (2)

Invullen (substitutie) van vergelijking voor I (1) in de vergelijking voor V_{OUT} (2) geeft:

$$V_{OUT} = \frac{V_{IN}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \cdot R \quad (3)$$

SPANNINGSTRANSFERT (COMPLEX)

In vergelijking (3) delen we linkerlid en rechterlid door V_{IN} :

$$\begin{aligned} \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} &= \frac{1}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \cdot R \\ &= \frac{R}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \\ &= \frac{R}{R + \frac{1 \cdot j}{j \cdot j \cdot \omega \cdot C}} \\ &= \frac{R}{R - \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot j} \\ &= \frac{\frac{R}{R}}{\frac{R}{R} - \frac{1}{\omega \cdot R \cdot C} \cdot j} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega \cdot R \cdot C} \cdot j} \quad (4) \end{aligned}$$

Het linkerlid van (4) (V_{OUT}/V_{IN}) noteren we als A_V en dit staat voor de **spanningsversterking** of - **verzwakking**:

$$A_V = \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega \cdot R \cdot C} \cdot j} \quad (5)$$

NOEMER VRIJMAKEN VAN j

Teller en noemer vermenigvuldigen met het complex toegevoegde geeft:

$$A_V = \frac{1 + \frac{1}{\omega \cdot R \cdot C} \cdot j}{1^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right)^2} \quad (6)$$

A_V IN DE VORM: $a + bj$

$$A_V = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right)^2} + \frac{\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}}{1 + \left(\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right)^2} \cdot j \quad (7)$$

MODULUS (GROOTTE) VAN A_V

Vergelijking (7) is van de vorm $a + bj$ waarbij a het reële deel is en b het imaginaire deel. De modulus bepalen we door de vierkantswortel te nemen uit $a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} |A_V| &= \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}}{1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1^2}{\left(1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}\right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}}{\left(1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}\right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}}} \quad (8) \end{aligned}$$

SPANNINGTRANSFERT $A_{V(dB)}$

$$\begin{aligned} A_{V(dB)} &= 20 \cdot \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}}} \right) = 20 \cdot \log 1 - 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}} \\ &= 0 - 20 \cdot \log \left(1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \log \left(1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2} \right) \\ &= -10 \cdot \log \left(1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

4.2.2 Fasehoek

FASEHOEK TUSSEN V_{IN} EN V_{OUT}

M.b.v. de alomgekende methode bepalen we de faserelatie tussen ingang en uitgang van uitdrukking (7):

$$\begin{aligned}
 \varphi &= Bgtg\left(\frac{Im}{Re}\right) \\
 &= Bgtg\left(\frac{\frac{\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}}{1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}}}{\frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}}}\right) \\
 &= Bgtg\left(\frac{\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}}{1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}}{1}\right) \\
 &= Bgtg\left(\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right) \quad (10)
 \end{aligned}$$

4.2.3 Afsnijfrequentie

BEPALEN VAN f_c

Eerder bepaalden we f_c als die frequentie waarbij de ingangsspanning met een factor $1/\sqrt{2}$ wordt verzwakt. We starten onze berekening met uitdrukking (8):

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega_c \cdot R \cdot C)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega_c \cdot R \cdot C)^2}} = \sqrt{2} \\
 &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{(\omega_c \cdot R \cdot C)^2} = 2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{(\omega_c \cdot R \cdot C)^2} = 2 - 1 \\
 &\Leftrightarrow (\omega_c \cdot R \cdot C)^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow \omega_c^2 = \frac{1}{(R \cdot C)^2} \\
 &\Leftrightarrow \omega_c = \frac{1}{R \cdot C} \Rightarrow f_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \quad (11)
 \end{aligned}$$

4.2.4 Bodediagram

We starten ons rekenbladprogramma en laten de uitdrukkingen voor de *spanningsversterking* A_v en $A_{v(dB)}$ plus de *fasehoek* φ uitrekenen door de juiste formules in te voeren. Dit levert volgende datasets op:

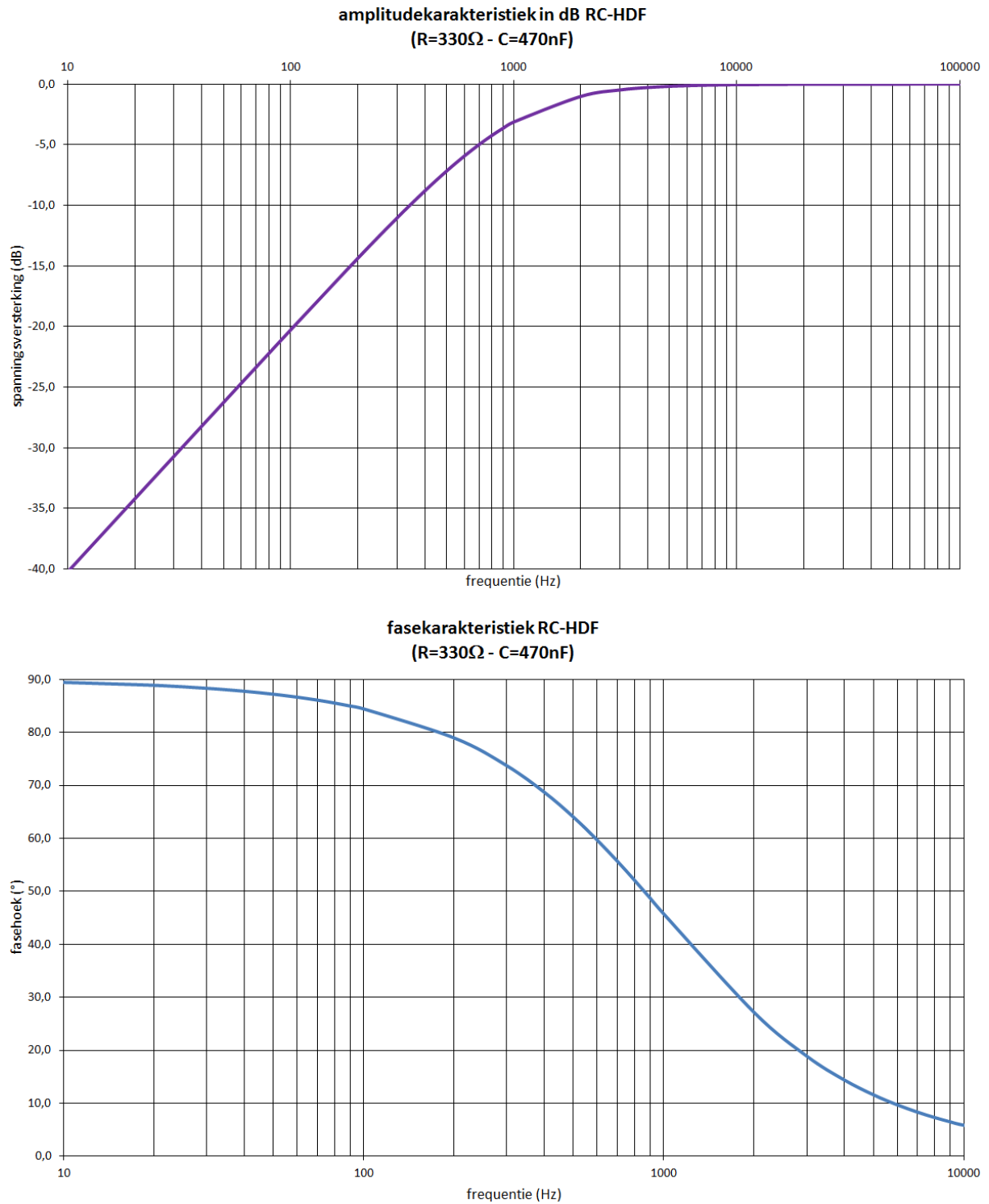
f (Hz)	$A_{v(dB)}$	f (Hz)	$A_{v(dB)}$	f (kHz)	$A_{v(dB)}$	f (kHz)	$A_{v(dB)}$
10	-40,2	100	-20,3	1	-3,1	10	0,0
20	-34,2	200	-14,4	2	-1,0	20	0,0
30	-30,7	300	-11,0	3	-0,5	30	0,0
40	-28,2	400	-8,8	4	-0,3	40	0,0
50	-26,3	500	-7,2	5	-0,2	50	0,0
60	-24,7	600	-5,9	6	-0,1	60	0,0
70	-23,3	700	-5,0	7	-0,1	70	0,0
80	-22,2	800	-4,2	8	-0,1	80	0,0
90	-21,2	900	-3,6	9	-0,1	90	0,0

△ Fig.4.16 | Rekenbladresultaten voor $A_{v(dB)}$
(R = 330 ohm en C = 470 nF)

f (Hz)	φ (°)	f (Hz)	φ (°)	f (kHz)	φ (°)	f (kHz)	φ (°)
10	89,4	100	84,4	1	45,7	10	5,9
20	88,9	200	79,0	2	27,2	20	2,9
30	88,3	300	73,7	3	18,9	30	2,0
40	87,8	400	68,7	4	14,4	40	1,5
50	87,2	500	64,0	5	11,6	50	1,2
60	86,7	600	59,7	6	9,7	60	1,0
70	86,1	700	55,7	7	8,3	70	0,8
80	85,5	800	52,1	8	7,3	80	0,7
90	85,0	900	48,7	9	6,5	90	0,7

△ Fig.4.17 | Rekenbladresultaten voor de fasehoek.
(R = 330 ohm en C = 470 nF)

Met de twee bovenstaande datasets kunnen we twee grafieken genereren: de *dB-amplitudekarakteristiek* en de daarbijhorende *fasekarakteristiek*. Samen vormen ze het zg. **bodediagram**.



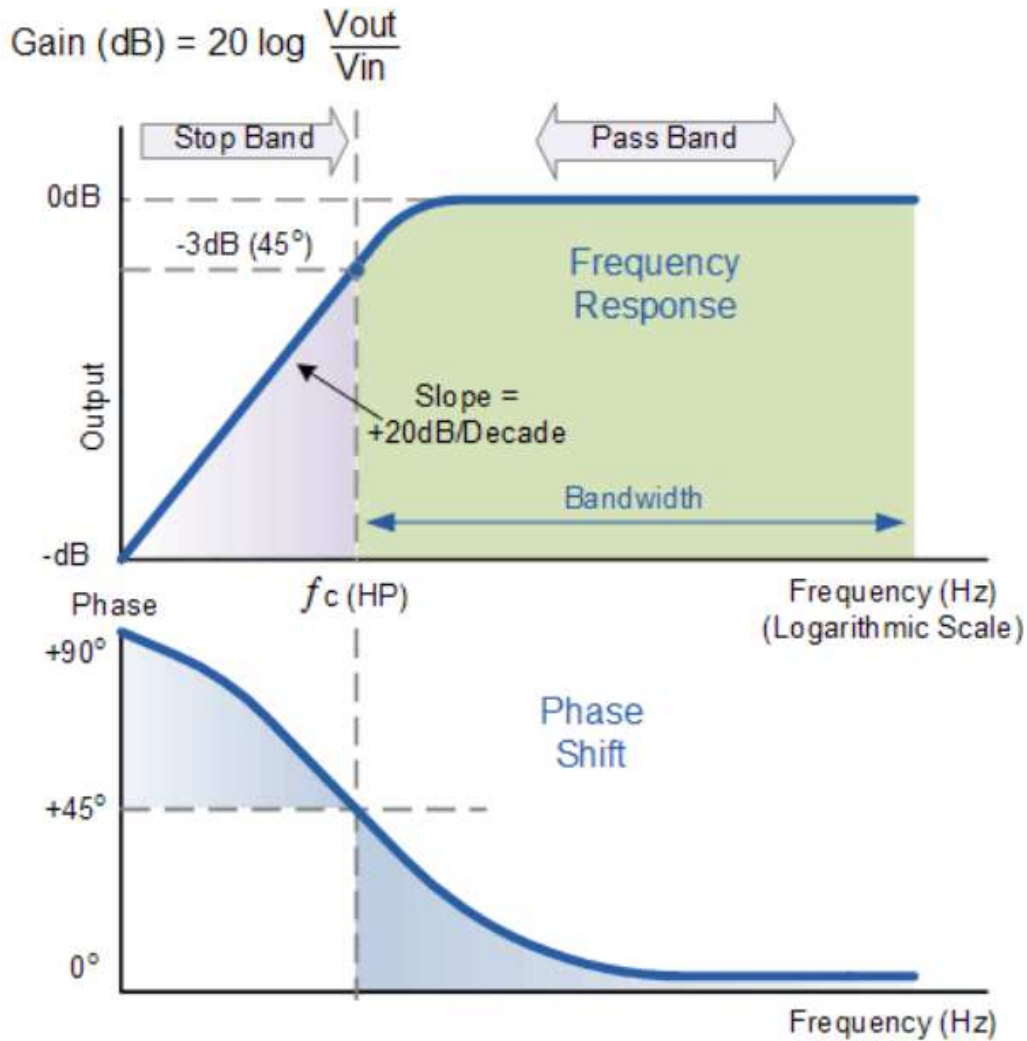
△ Fig.4.18 | Bodediagram van een RC-hoogdoorlaatfilter.
Grafieken: W. Van Wichelen (Excel)

4.2.5 Samenvatting

Parate kennis!

- Algemeen kunnen we stellen dat het **RC-hoogdoorlaatfilter** (HDF) *lage* frequenties blokkeert en de *hoge* frequenties *doorlaat*.
- **DC**-signalen worden geblokkeerd en **AC**-signalen worden doorgelaten (werking als **koppelfilter**).
- Bij een signaalfrequentie gelijk aan de **kantelfrequentie** (afsnijfrequentie) laat het HDF **70%** van de originele signaalamplitude door.
- Bij de afsnijfrequentie is de spanningsverzwakking juist **-3dB**.
- Deze kantelfrequentie markeert de zg. **doorlaatband** (bandbreedte) van het HDF.
- Van signaalfrequenties binnen deze doorlaatband is steeds meer dan 70% van de originele signaalamplitude terug te vinden aan de uitgang.
- Bij *zeer lage* signaalfrequenties is de fasehoek **+90°** en gedraagt de RCHDF zich **zuiver reactief**.
- Bij signaalfrequenties die *lager* zijn dan de kantelfrequentie ($f < f_c$) is de fasedraaiing groot en positief en weegt de **reactieve component** door.
- Bij de **afsnijfrequentie** (kantelfrequentie) is de fasehoek (fasedraaiing) tussen de *ingangsspanning* en *uitgangsspanning* juist **+45°**
- Bij signaalfrequenties die *hoger* zijn dan de kantelfrequentie ($f > f_c$) neemt de fasedraaiing verder af en weegt de **ohmse component** door.
- Bij *zeer hoge* signaalfrequenties is de fasehoek **0°** en gedraagt de RCHDF zich **zuiver ohms**.





△ Fig.4.19 | Bodediagram van een 1ste orde hoogdoorlaatfilter
Bron: <https://www.electronics-tutorials.ws>

4.4 Oefeningen

1. Ontwerp een RC-laagdoorlaatfilter van eerste orde.
De ingangsimpedantie is minimaal 47 kΩ. Voorzie een bandbreedte van 20 kHz. Schets de bodeplot over 4 decaden en duid het -3dB punt aan.
2. De aangelegde sinusspanning over de klemmen van een RC-seriekring is 60 volt met een frequentie van 10 kHz. We takken de uitgangsspanning af over de weerstand. Bereken de kantelfrequentie, de uitgangsspanning en de spanningstransfert in decibel.
3. Ontwerp een RC-hoogdoorlaatfilter van eerste orde.
Pas een weerstand toe van 6800Ω. De kantelfrequentie is 5 kHz. Schets de bodeplot over 4 decaden en duid het -3dB punt aan.