3.3 RLC-seriekring

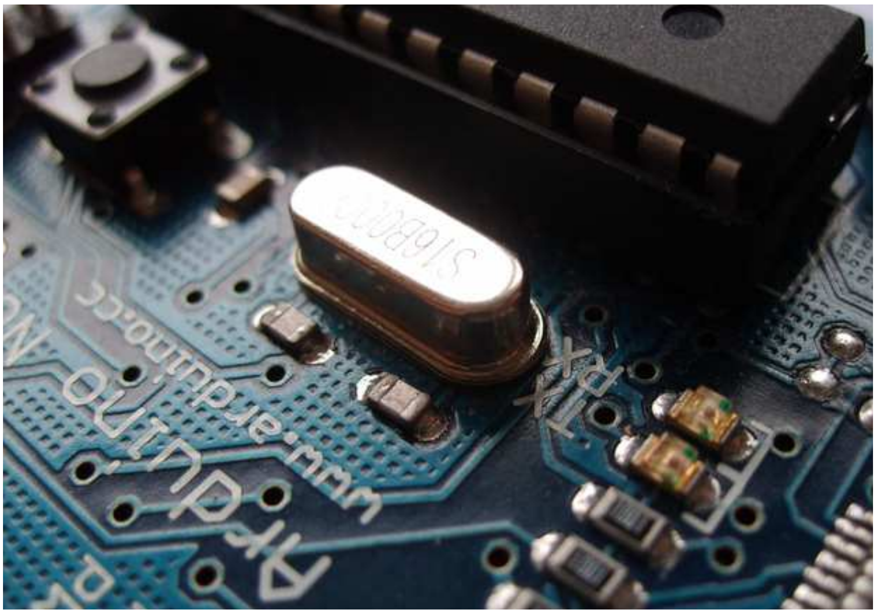
3.3.1 Trillingen, trillingen & trillingen

Wanneer je tuurt in de onmetelijke sterrenhemel boven ons, dan zou je in de verleiding kunnen komen om te denken dat dit een *statisch* gegeven is. Maar vergis je niet: het universum is één en al **beweging** en werkelijk alles tolt over en door elkaar dat het een lieve lust is!

△ Fig.3.7 | Het universum, of is het één van de vele?
Bron: https://radio1.be

Het heelal, waar wij ook deel van uitmaken, barst van de energie. Planeten draaien om hun ster op een voorgeprogrammeerde kadans, alsof er een kosmisch uurwerk aan het werk is. Onze zon genereert uitbarstingen van energie die zich manifesteren als elektromagnetische *trillende* golfverschijnselen welke wij her-kennen als 'licht'. Maar ook in de microscopische nanowereld zijn het **trillingen**, **vibraties** en **resonanties** die de zaken bij elkaar houden. Zo cirkelen ook de elektronen van een atoom vrolijk rond hun kern volgens een bepaald ritmisch patroon en deze elektronen zelf trillen op hun beurt ook nog eens op een bepaalde **frequentie**. Het biologische leven zelf is één en al **trilling**. Onze hartspier klopt op een welbepaald ritme en blijft dit doen gedurende ons hele levende bestaan. Al deze levende en niet-levende systemen bezitten een bepaalde voorkeur om op een welbepaalde frequentie te gaan trillen: de **eigenfrequentie**.

Maar ook onnatuurlijke uitvindsels van de mensheid maken dankbaar gebruik van **trillingen** en **oscillaties**. Bellen met je smartphone, je middagmaal opwarmen met de microgolfoven, het luisteren naar een DAB-radiostation, een videogame spelen op je personal computer,... zijn allen variaties op hetzelfde thema. Zonder **oscillatie**, **resonanantie**, **vibratie** en **trillingen** zakt onze hele samenleving en bij uitbreiding het universum dat ons omringt, als kaartenhuis in elkaar!

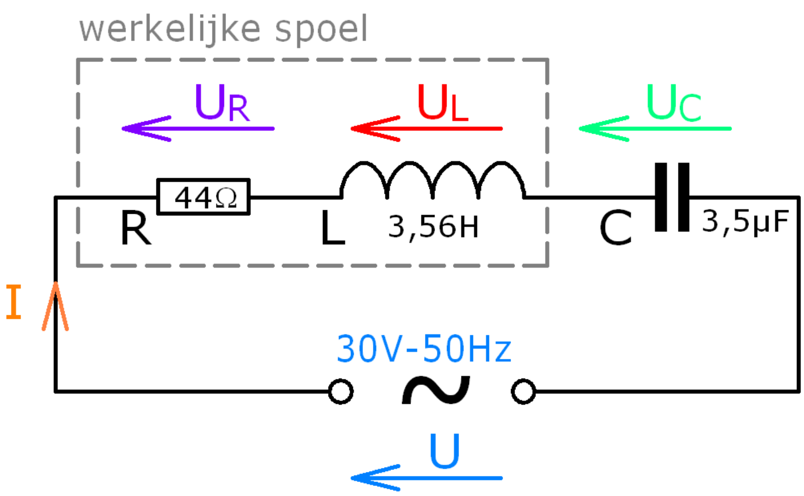


△ Fig.3.8 | Kristaloscillator van een Arduino microcontroller
Bron: https://commons.wikimedia.org

Het hart van vele elektronische apparaten (radio-ontvanger, microcontroller, PC,...) is een elektrische oscillator. Tegenwoordig zijn veel oscillatorcircuits opgebouwd rond een kristal met een eigenfrequentie van vele MHz. Maar de moeder (of vader?) van alle elektrische oscillatoren is de **seriekring** van een *condensator* en een *spoel*. Als we de geschiedenis van de wetenschap een beetje eer willen aandoen, dan is het logisch dat de **RLC-seriekring** een voorname plaats krijgt in de cursus die hier voor je ligt!

3.3.2 Complexe uitwerking

Voorbeeld



△ Fig.3.9 | Praktische RLC-seriekring.
Tekening: W. Van Wichelen (TinyCAD)

We schakelen een *praktische* spoel met een zelfinductiecoëfficiënt van 3,56 H in serie met een condensator met een capaciteit van 3,5 µF. De wikkeldraad van de spoel heeft een weerstandswaarde van 44 Ω. Deze weerstand kunnen we meten met een ohmmeter in spanningsloze toestand.

GEGEVENS

- bronspanning: U = 30 V (effectief)
- ohmse weerstand R = 44 Ω
- zelfinductiecoëfficiënt L = 3,56 H
- capaciteit C = 3,5 µF
- frequentie: f = 50 Hz (net)

GEVRAAGD

- kringimpedantie Z (complex)
- kringstroom I (complex)
- fasehoek φ (complex)
- deelspanning U_R (complex)
- deelspanning U_L (complex)
- deelspanning U_C (complex)

BEPALEN KRINGIMPEDANTIE (Z)

Algemeen:

$$\overline{Z} = \overline{R} + \overline{X_L} + \overline{X_C}$$
$$= R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$
$$= R + j \cdot \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot j$$
$$= R + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right) \cdot j$$

Invullen:

$$\overline{Z} = 44 + \left(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 3,56 - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 3,5 \cdot 10^{-6}}\right) \cdot j$$
$$= 44 + (1118,4 - 909,46) \cdot j$$
$$= (44 + 208,94 \cdot j)\Omega$$

Modulus (grootte):

$$\left|\overline{Z}\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2}$$
$$= \sqrt{44^2 + 208,94^2}$$
$$= 213,52\Omega$$

BEPALEN KRINGSTROOM (I)

$$\left|\overline{I}\right| = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}}$$
$$= \frac{30}{44 + 208,94 \cdot j}$$
$$= \frac{30 \cdot (44 - 208,94 \cdot j)}{44^2 + 208,94^2}$$
$$= \left(\frac{1,32 \cdot 10^3 - 6,27 \cdot 10^3 \cdot j}{45,59 \cdot 10^3}\right) A$$
$$= (28,95 \cdot 10^{-3} - 137,53 \cdot 10^{-3} \cdot j) A$$
$$= (28,95 - 137,53 \cdot j) mA$$

Modulus (grootte):

$$\left|\overline{I}\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2}$$
$$= \sqrt{28,95^2 + 137,53^2}$$
$$= 140,54mA$$

Dit is de stroom die we kunnen meten met een A-meter.

BEPALEN FASEHOEK (φ)

$$\varphi = Bgtg\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = Bgtg\left(\frac{-137,53}{28,95}\right)$$

$$= -78,11^0$$

Het minteken wijst op het feit dat de kringstroom na-ijlt op de bronspanning: de kring gedraagt zich inductief.

BEPALEN DEELSPANNING WEERSTAND (U_R)

$$\overline{U_R} = \overline{I} \cdot R = (28,95 - 137,53 \cdot j)mA \cdot 44\Omega$$

$$= (1,27 \cdot 10^3 - 6,05 \cdot 10^3 \cdot j)mV$$

$$= (1,27 - 6,05 \cdot j)V$$

Modulus (grootte):

$$\left|\overline{U_R}\right| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{1,27^2 + 6,05^2}$$

$$= 6,18V$$

Dit is de spanning die een voltmeter aanduidt.

BEPALEN DEELSPANNING SPOEL (U_L)

$$\overline{U_L} = \overline{I} \cdot \overline{X_L} = (28,95 - 137,53 \cdot j)mA \cdot (2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 3,56 \cdot j)\Omega$$

$$= (28,95 - 137,53 \cdot j)mA \cdot (1118,4 \cdot j)\Omega$$

$$= (32,38 \cdot 10^3 \cdot j + 153,38 \cdot 10^3)mV$$

$$= (153,81 + 32,38 \cdot j)V$$

Modulus (grootte):

$$\left|\overline{U_L}\right| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{153,81^2 + 32,38^2}$$

$$= 157,18V$$

Dit is de spanning die een voltmeter aanduidt.

BEPALEN DEELSPANNING CONDENSATOR (U_C)

$$\overline{U_C} = \overline{I} \cdot \overline{X_C} = (28,95 - 137,53 \cdot j)mA \cdot (-909,46 \cdot j)\Omega$$

$$= (-26,33 \cdot 10^3 \cdot j - 125,08 \cdot 10^3)mV$$

$$= (-125,08 - 26,33 \cdot j)V$$

Modulus (grootte):

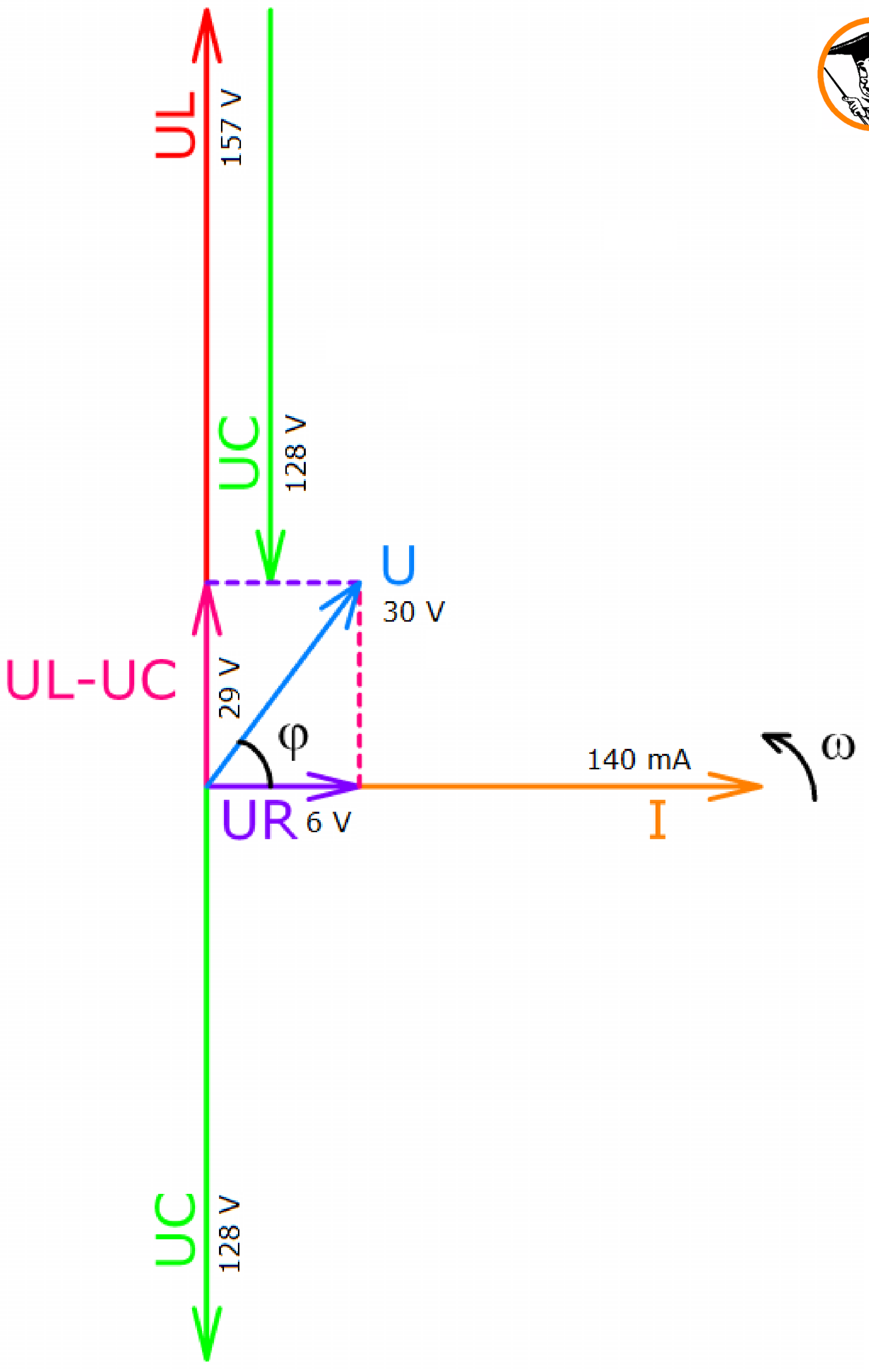
$$\left|\overline{U_c}\right| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{125,08^2 + 26,33^2}$$

$$= 127,82V$$

Dit is de spanning die een voltmeter aanduidt.

3.3.3 Vectordiagram

Met de bovenstaande resultaten kunnen we het vectordiagram van figuur 3.10 construeren:

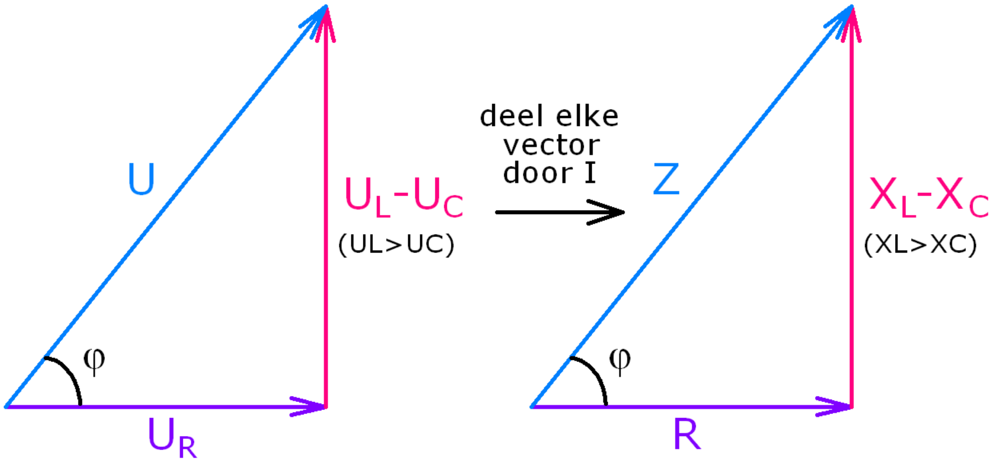


△ Fig.3.10 | Vectordiagram van een RLC-seriekring.
Tekening: W. Van Wichelen (TinyCAD)

We merken op dat het vectordiagram niet op schaal getekend is. We hebben de ohmse component U_R iets meer gewicht gegeven omwille van de duidelijkheid.

3.3.4 Impedantiedriehoek

Uit het vectordiagram van figuur 3.10 leiden we de **spanningsdriehoek** en de **impedantiedriehoek** af:



△ Fig.3.11 | Impedantiedriehoek van een RLC-seriekring.
Tekening: W. Van Wichelen (TinyCAD)

Uit de **spanningsdriehoek** leiden we af:

$$\cos\varphi = \frac{ARZ}{SZ} = \frac{U_R}{U} \qquad U = \sqrt{(U_R)^2 + (U_L - U_C)^2}$$

$$\varphi = \text{Bgcos}\left(\frac{U_R}{U}\right)$$

Uit de **impedantiedriehoek** leiden we af:

$$\cos\varphi = \frac{ARZ}{SZ} = \frac{R}{Z}$$

$$\varphi = \text{Bgcos}\left(\frac{R}{Z}\right)$$

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

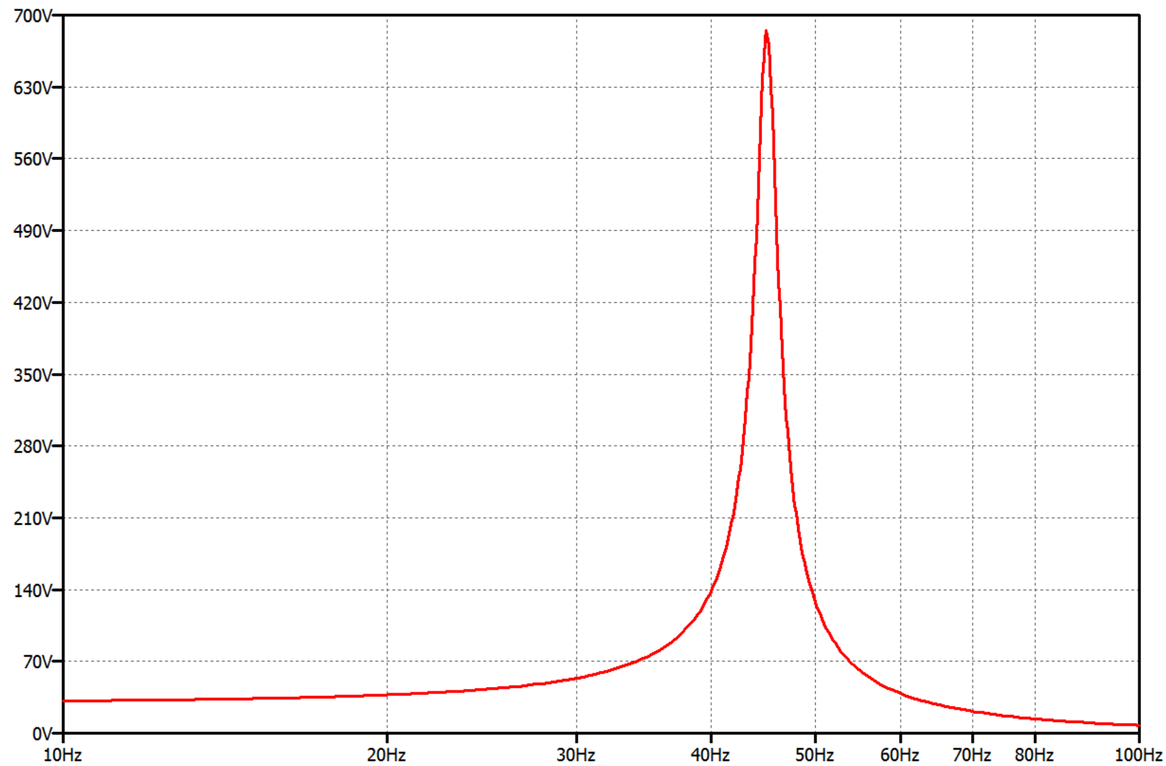
Inductief & capacitief gedrag

Wanneer de **capacitieve** component *groter* is dan de **inductieve** component:

- dan wordt de reactieve vector in de spanningsdriehoek $\mathbf{U_C\text{-}U_L}$ ($U_C>U_L$).
- Ook in de impedantiedriehoek wordt de reactieve vector dan $\mathbf{X_C\text{-}X_L}$ ($X_C>X_L$).

3.3.5 Spanningsopslingering

Bestudeer het vectordiagram van figuur 3.10 nog eens. Wat valt een aandachtige student onmiddellijk op? Juist, de spanning die we meten over de condensator (128V) en over de spoel (157V) is vele malen groter dan de aangeboden bronspanning van 30V. Dit effect noemen we **spanningsopslingering** en dit bizarre fenomeen verdient extra aandacht. Stel dat we zouden werken op de *volle* netspanning (230V) dan ontstaan er gevaarlijk hoge spanningswaarden van enkele kilovolts. Dit stelt isolatieproblemen en kan eventueel leiden tot *elektrocutie*.



△ Fig.3.12 | Spanningsopslingering (U_C) bij 40 - 50 Hz.
Simulatie: W. Van Wichelen (LTspice)

Waarschuwing!

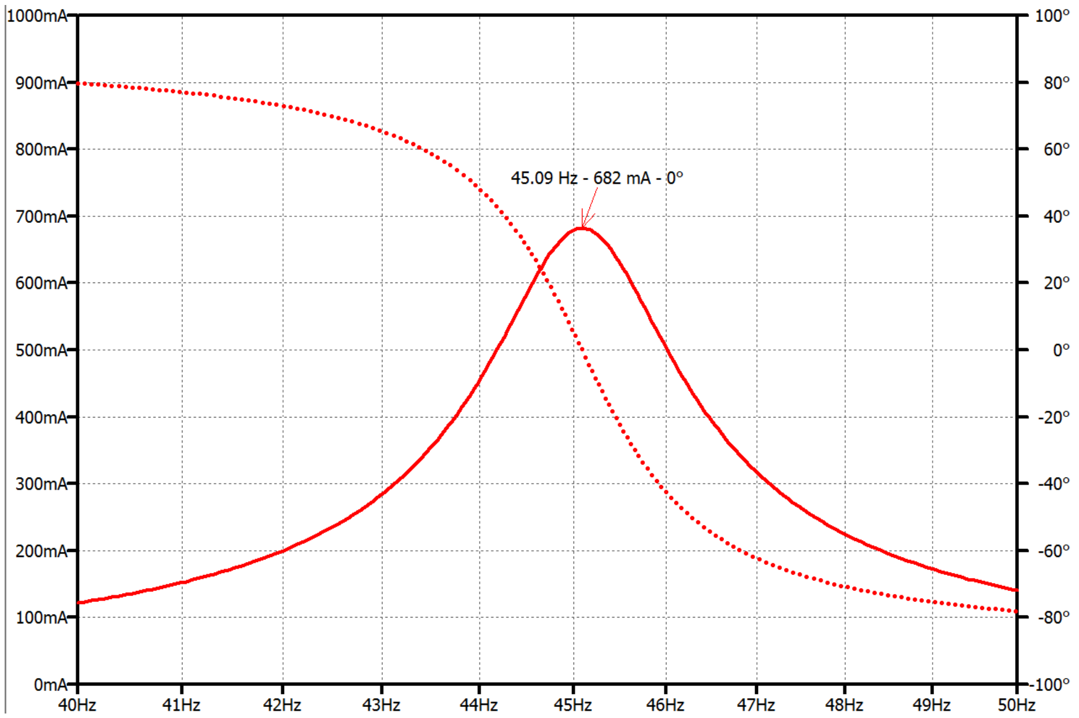
- Het is **niet** toegelaten om experimenten met RLC-kringen uit te voeren op de **volle** netspanning van $230V_{RMS}$.
- Door het risico van **spanningsopslingering** bestaat er kans op **elektrocutie**.
- Het is raadzaam om met een verlaagde netspanning te werken van bijvoorbeeld maximaal 30 volt.

3.3.6 Serieresonantie

Uit figuur 3.12 leren we dat de condensatorspanning tussen de 40 en de 50 Hz een piek bereikt van bijna 700 volt. Dit betekent dat de bronspanning van 30 volt met een factor van meer dan 20 opgeslingerd kan worden. Bij één bepaalde frequentie piekt de condensatorspanning: de invloed van de condensator wordt dan *volledig* gecompenseerd door de invloed van de spoel in de kring.

Resonantie

- Enkel bij deze *welbepaalde* frequentie vindt er een volledige **energie-uitwisseling** plaats tussen de reactieve kringelementen L en C.
- De *magnetische* energie in de spoel (opgeslagen in het magnetisch veld) gaat over in *elektrische* energie in de condensator (opgeslagen in het elektrisch veld) en vice versa.
- Dit over en weer slingeren van magnetische en elektrische energie gebeurt op een specifiek ritme, nl. de **eigenfrequentie**.
- Dit fenomeen heet **oscillatie**: de RLC-kring is nu in **resonantie**.
- Resonantievoorwaarde: $\mathbf{X_L = X_C}$



△ Fig.3.13 | Kringstroom bij 40 - 50 Hz.
Simulatie: W. Van Wichelen (LTspice)

Laten we figuur 3.13 wat van naderbij bekijken. LTspice is zo vriendelijk geweest om naast de kringstroom (volle grafiek) ook de fasehoek (bolletjes grafiek) te plotten in functie van de frequentie. Bij een frequentie van 45,09 Hz piekt de kringstroom tot 682 mA. Wat blijkt nu? Bij deze specifieke frequentie is het net of de spoel en de condensator niet in de kring staan. De stroom is het resultaat van de deling van de bronspanning door de waarde van de weerstand. Doe de proef maar: $I_{45,09Hz}$ = 30 V / 44 Ω = 682 mA. Ook de fasehoek valt op. De kringstroom is in fase met de bronspanning want bij 45,09 Hz lezen we een fasehoek af van 0°. Onze RLC-seriekring gedraagt zich dus zuiver **ohms**. De *inductieve* en *capacitieve* eigenschappen lijken wel in rook te zijn opgegaan!

BEPALEN VAN DE RESONANTIEFREQUENTIE

Resonantievoorwaarde:

$$X_L = X_C$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \pi \cdot f_o \cdot L = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_o \cdot C}$$

$$\Leftrightarrow f_o \cdot f_o = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot C}$$

$$\Leftrightarrow (f_o)^2 = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^2 \cdot L \cdot C}$$

$$\Leftrightarrow f_o = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{(2 \cdot \pi)^2 \cdot L \cdot C}}$$

$$\Leftrightarrow f_o = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

$$\boxed{f_o = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}}$$

- f_o: oscillatie-, resonantie-, of eigenfrequentie (Hz)
- L: zelfinductiecoëfficiënt van de spoel (H)
- C: capaciteit van de condensator(F)

Opmerking

De resonantiefrequentie (eigenfreqentie) $\mathbf{f_o}$ is volledig **onafhankelijk** van de waarde van de ohmse weerstand in de RLC-kring: enkel de **reactieve** componenten (L en C) bepalen de waarde.

Parate kennis!

Een RLC-seriekring die je aansluit op de resonantiefrequentie vertoont volgende kenmerken:

- De **kringimpedantie** is gelijk aan de waarde van de ohmse weerstand in de kring: $\mathbf{Z_o = R}$
- Over de ohmse weerstand in de kring staat de aangesloten bronspanning: $\mathbf{U_o = U_{Ro}}$
- De **kringstroom** bij resonantie is maximaal en is enkel afhankelijk van de waarde van de ohmse weerstand in de kring: $\mathbf{I_o = U_o/R}$
- De bronspanning en stroom zijn **in fase**: $\varphi_o = \mathbf{0°}$

3.3.7 Frequentie-afhankelijk gedrag

Bij het bestuderen van figuur 3.13 bemerken we dat, naast de kringstroom, ook de fasehoek verandert met de waarde van de frequentie van de bronspanning. Passen we een frequentie toe die lager is dan de resonantiefrequentie, dan zien we dat de fasehoek positief is: dit duidt op een **capacitief** gedrag. Een bronfrequentie hoger dan de resonantiefrequentie resulteert in **inductief** gedrag. Onderstaande tabel vat het frequentie-afhankelijke gedrag goed samen:

	$f < f_o$	$f = f_o$ resonantie	$f > f_o$
reactanties X_L en X_C	$X_C > X_L$	$X_L = X_C$	$X_C < X_L$
kring-impedantie Z	$Z > R$	R	$Z > R$
spanningen U_L en U_C	$U_C > U_L$	$U_C = U_L$	$U_C < U_L$
bronspanning U	$\sqrt{U_R^2+(U_C-U_L)^2}$	U_R	$\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}$
fasehoek φ	I ijlt **voor** op U	I **in fase** met U	I ijlt **na** op U
gedrag van de RLC-kring	ohms/ capacitief	zuiver ohms	ohms/ inductief

3.3.8 Kwaliteitsfactor

De RLC-seriekring van figuur 3.9 heeft een eigenfrequentie van ca. 45 Hz. Wanneer we deze kring onderwerpen aan deze frequentie, dan weten we dat het fenomeen van spanningsopslingering zal optreden. Over de reactieve kringelementen meten we nu een spanning die een bepaalde factor groter is dan de originele bronspanning. In de ingenieurstechniek gaan we deze factor definiëren als de **kwaliteitsfactor** van de trillingskring.

Definitie

- Mate van spanningsopslingering = **kwaliteitsfactor = Q**
- Wordt gedefinieerd bij de **eigenfrequentie = resonantiefrequentie f_o**
- $Q = \frac{U_{Co}}{U} = \frac{U_{Lo}}{U}$
- De kwaliteitsfactor is een **dimensieloos** getal, m.a.w. de kwaliteitsfactor heeft *geen* eenheid.

BEPALEN VAN Q i.f.v. L EN C

We gaan uit van de spanningsopslingering over de spoel bij resonantie:

$$Q = \frac{U_{Lo}}{U}$$

Bij resonantie vloeit de resonantiestroom I_0 en over de zuiver ohmse weerstand vinden we de bronspanning terug:

$$Q = \frac{I_o \cdot X_L}{I_o \cdot R}$$

$$= \frac{X_L}{R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_o \cdot L}{R} \qquad (1)$$

We kunnen de resonantiefrequentie bepalen m.b.v. de kringelementen L en C:

$$f_o = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \qquad (2)$$

Invullen van (2) in (1):

$$Q = f_o \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{R}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{R}$$

$$= \frac{L}{R \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

$$= \frac{\sqrt{L} \cdot L}{R \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{C}}$$

$$= \frac{\sqrt{L} \cdot L}{R \cdot L \cdot \sqrt{C}}$$

$$= \frac{\sqrt{L}}{R \cdot \sqrt{C}}$$

$$= \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

We kunnen de mate van opslingering dus voorspellen a.d.h.v. de waarden van de kringelementen R, L en C:

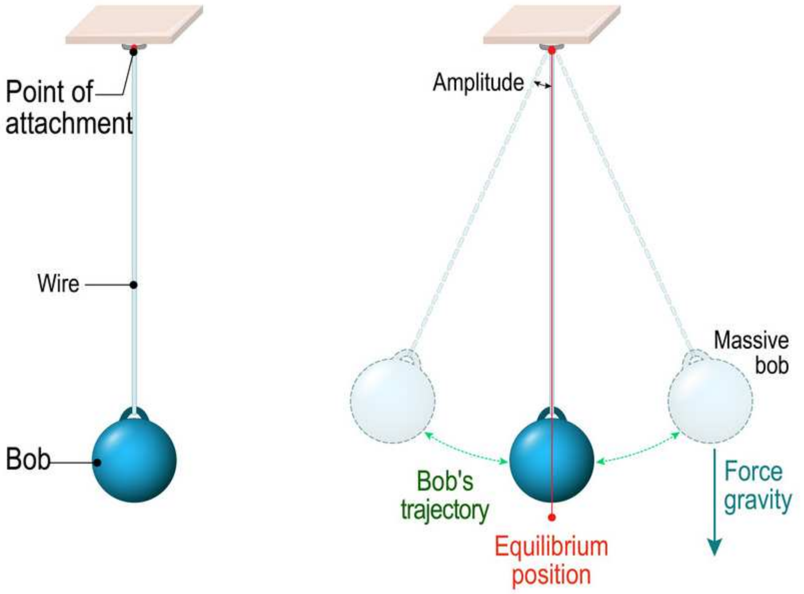
$$\boxed{Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Parate kennis!

- Hoe *groter* de **ohmse** component van de RLC-trillingskring:
  - ✓ hoe *kleiner* de **kwaliteit**
  - ✓ hoe *kleiner* de **spanningsopslingering**
- Hoe *kleiner* de **ohmse** component van de RLC-trillingskring:
  - ✓ hoe *groter* de **kwaliteit**
  - ✓ hoe *groter* de **spanningsopslingering**

3.3.9 Mechanische resonantie

Een typisch voorbeeld van een oscillatief of resonerend systeem uit het dagelijkse leven is een *schommel*. Als we dit speeltuig wat idialiseren bekomen we een zogenaamde **slinger** die een typische heen en weer gaande slingerbeweging maakt. Elke slinger bestaat in principe uit een massa opgehangen aan het uiteinde van een koord (of een staaf) die aan de bovenzijde vrij draaibaar is. Als we de massa opzij trekken en daarna loslaten, zal de massa heen en weer bewegen onder invloed van de zwaartekracht. De massa passeert daarbij telkens het centrale, laagste punt.



△ Fig.3.14 | Principe van een zwaartekrachtslinger
Bron: https://www.vectorstock.com

Wat je ook probeert, je kunt een schommel nooit sneller of trager doen slingeren dan zijn eigen typische schommelritme: de **eigen-frequentie**. Misschien geloof je dit niet op het eerste zicht, maar de schommelfrequentie is *enkel* afhankelijk van de **lengte** van de slinger:

$$\boxed{f_o = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

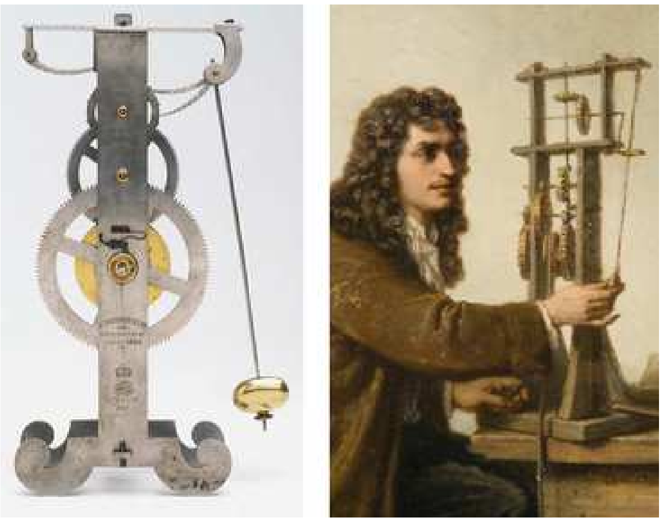
- g: valversnelling (9,81 m/s²)
- ℓ: slingerlengte in meter

DOSSIER **WISSELSTROOMTHEORIE**

De formule voor de slingerfrequentie lijkt wel heel erg veel op de formule voor de eigenfrequentie van de RLC-trillingskring. Deze analogie toont aan dat de *mechanische* wereld en de *elektrische* wereld heel wat raakvlakken kent en doet het hart van menig wetenschapper sneller slaan! Wat zit de natuur toch prachtig in elkaar, nietwaar?

△ Fig.3.15 | Kleine Bo op de schommel
Foto: W. Van Wichelen

De *massa* van de schommelaar is dus van geen enkele tel! Galileo Galilei kwam dit effect reeds in 1602 op het spoor. Hij ontdekte dat een slinger een regelmatige periodieke beweging uitvoert, waarmee je de tijd zou kunnen meten. Dit leidde in 1657 tot de ontwikkeling van het **slingeruurwerk** door Christiaan Huygens.



△ Fig.3.16 | Het slingeruurwerk van Christiaan Huygens
Bron:http://www.techna.nl

Meestal wenden we het resonantieverschijnsel aan om nuttige dingen te doen zoals draadloze communicatie, het synchroniseren van berekeningen in een computers,... Maar soms gaat het totaal de verkeerde kant op wanneer toestellen en bouwwerken ongewild en overwacht in resonantie treden met soms spectaculaire effecten tot gevolg. Een bekend voorbeeld hiervan is het instorten van de **Tacomabrug** in de VS in 1940. Door felle windstoten kwam de hangbrug in een soort oncontroleerbare oscillatiemodus terecht en de amplitude werd zo groot dat de brug het finaal begaf.

△ Fig.3.17 | Net voor de instorting van de Tacoma brug (VS)
Bron: https://www.history.com

EXTRA
ELECTRIVIAL

3.3.10 Oefeningen

1. Bij een RLC-seriekring is U_R = 8 V, U_C = 20 V en U_L = 5 V.
   Bereken de aangesloten spanning en teken de spanningsdriehoek.

2. In een RLC-seriekring is R = 150Ω, Z = 170Ω en X_C = 140Ω.
   Bereken X_L.

3. In een serieschakeling van een praktische spoel met een condensator is R_S = 40Ω, X_L = 30Ω en X_C = 70Ω.
   Bereken de impedantie van de spoel.

4. Een RLC-seriekring met R = 10Ω is in *resonantie*.
   De aangesloten spanning is 1 V - 100 kHz.
   Bereken de stroom en de spanning over de weerstand.

5. Een spoel met ohmse weerstand R_S = 5Ω wordt in serie met een condensator met capaciteit C = 125 pF aangesloten op een bron U = 50 mV en f = 1 MHz. De kring is in resonantie.
   Bereken de zelfinductiecoëfficiënt en de stroom in de kring.

6. In een RLC-seriekring is R = 5Ω en L = 12 mH.
   De pulsatie van de aangesloten wisselspanning is 5000 rad/s.
   Welke waarde moet je aan C geven, zodat de kring oscilleert?

7. In een RLC-seriekring is R = 20Ω en L = 400 mH.
   De bronspanning U = 10 V met pulsatie 500 rad/s.
   De kring is in resonantie. Bereken de capaciteitswaarde, de kringstroom, de kwaliteitsfactor, U_R, U_L en U_C.

8. In een RLC-seriekring is R = 100Ω, L = 4 mH en C = 160 pF.
   Bereken de Q-factor.